



**María Gabriela Fissore
Agustín Mauro
Barbara Paez Sueldo
Mateo Santillan Castro
(Eds.)**

Filosofía de las Ciencias por Jóvenes Investigadores

vol. 4

Filosofía de la Ciencia por Jóvenes Investigadores

vol. 4

María Gabriela Fissore
Agustín Mauro
Barbara Paez Sueldo
Mateo Santillan Castro
(Eds.)

Colecciones
del ClFFyH



Filosofía de la Ciencia por jóvenes investigadores vol. 4 / Matías Giri... [et al.]; editado por María Gabriela Fissore ... [et al.]. - 1a ed. - Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Filosofía y Humanidades, 2023.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-33-1766-2

1. Filosofía de la Ciencia. I. Giri, Matías. II. Fissore, María Gabriela, ed.

CDD 121

Publicado por

Área de Publicaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades - UNC

Córdoba - Argentina

1º Edición



Área de

Publicaciones

Lxs editorxs de este volumen agradecen a los miembros de la Carrera de Personal de Apoyo del IDH-CONICET –Federico Mina, Cecilia Martínez y Julián Reynoso– por la colaboración recibida.

Correctores técnicos: Ignacio Heredia y Tomás Siac

Diagramación y diseño de portadas: María Bella

2023



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.



Hacia una aritmética del infinito: trasvases entre continuo y discreto en Deleuze y Lautman

Joaquín E. Morales Palominos*

1. Introducción

Este artículo tiene como objetivo mostrar que la consolidación del análisis como disciplina matemática estuvo atravesada por una discusión de marcado carácter ontológico acerca de la naturaleza del continuo. Particularmente, quisiera argumentar que este debate es habilitado por la existencia de una estrecha relación entre ontología y técnica en las matemáticas. Para ello, haremos un recorrido por las controversias y problemas antecedentes a la fundación del análisis, así como por sus distintas interpretaciones. Finalmente, veremos que la interpretación estática de Cauchy (1821) y Weierstrass, la cual cierra el debate, implica una reconceptualización de las nociones de espacio y movimiento al abstraerlas de su definición basada en representaciones geométricas. Esto, como veremos, tendrá una importante influencia en la amplia gama de teorías matemáticas que surgirán debido a la introducción del álgebra en el núcleo del análisis, teniendo en cuenta el pliegue entre el dominio de lo continuo y lo discontinuo que esto conlleva.

2. Una revolución en las matemáticas

Los primeros años del siglo XIX vieron surgir una verdadera revolución científica en el interior de las matemáticas. Esto ocurrió con la culminación de la historia de abstracción del análisis infinitesimal, una disciplina que no surgió sin ser objeto de cuestionamientos. Particularmente, fue acusada de poseer ambigüedades en sus definiciones fundamentales y métodos confusos basados en suposiciones representativas acerca del espacio y el movimiento; problemas que le impedían edificarse sobre ra-

* UChile, USaCH, UTEM.

Mail de contacto: joaq.emp@gmail.com

zonamientos aceptablemente lógicos y objetivos. En tal formalización y distanciamiento del sentido común, en camino a consolidarse como una disciplina dotada de una sólida base aritmética, se puede vislumbrar lo que es quizás la característica principal de las matemáticas modernas: la aparición de profundas resonancias estructurales entre dominios significativamente dispares, como lo son el dominio discontinuo de la aritmética y el dominio continuo que caracteriza al análisis. De aquí se desprende un hecho de especial interés para la filosofía matemática, y es que, al sumergirse en las particularidades de las técnicas implicadas en dichas resonancias, es posible descubrir y estudiar con rigurosidad la estructura dialéctica que precede a las teorías.

En el contexto de la filosofía de las ciencias, la noción de revolución científica tiene una ineludible carga semántica otorgada por la famosa conceptualización realizada por Thomas Kuhn en su obra *La estructura de las revoluciones científicas* (1962). Para entender el proceso que se describe a continuación, me parece de gran utilidad destacar dos asuntos esenciales de la formulación que realiza Kuhn respecto al desarrollo de las teorías. Primero, quisiera demarcar un contraste con respecto al concepto de inconmensurabilidad. Es decir, con la idea de que los saltos entre paradigmas implican una relación de incompatibilidad entre las teorías de uno y otro periodo. Lo que nos impide hablar de inconmensurabilidad en la matemática son justamente las resonancias estructurales que detalla Lautman (2011). Desde esta perspectiva, las antiguas teorías son, de hecho, siempre mesurables desde las nuevas, puesto que es posible encontrar un marco dentro del cual éstas son generalizadas. Tal como afirma Lautman, mientras que en la física (así como en muchas otras disciplinas) las oposiciones y divisiones que surgen dentro de su armazón teórico son la fuente de las mayores dificultades, en la matemática, en cambio, tales disparidades constituyen la más acertada muestra de la profunda unidad que le subyace (2011, p. 326). En segundo lugar, me parece de gran utilidad rescatar el concepto de anomalía planteado por Kuhn (1962). Puesto que la necesidad de una formalización del análisis surgió justamente de la acumulación de anomalías en su desarrollo. Particularmente, el problema de los infinitesimales, cuyos esquemas lógicos no eran concebibles en el marco de las geometrías euclidiana y cartesiana, obligó a una abstracción de los problemas de la época. Con todo esto en cuenta, la revolución aludida debe entenderse como un punto de inflexión en el desarrollo de las

matemáticas donde se aunaron dos perspectivas ontológicamente disímiles y, en consecuencia, se disparó la producción creativa propiciando el surgimiento de nuevas áreas como, por ejemplo, la topología algebraica o la teoría de haces, herramientas de gran importancia para el estudio del comportamiento global de entidades de naturaleza local.

3. Breve historia del cálculo

Como muchas historias, todo comienza en la antigua Grecia cuando el filósofo atomista Demócrito defendió frente a Protágoras que la intersección entre una circunferencia y una recta tangente es un único punto. Era de esperar que la cosmovisión de Demócrito le facilitase concebir este punto específico en que la recta toca a la circunferencia, de igual modo como le permitió hablar de átomos cuando nadie quería fragmentar el mundo. El dominio discontinuo que plantea la ontología de Demócrito incita de manera protocolar los problemas fundamentales que subyacen al cálculo del siglo XVII: ¿cómo generar un dominio continuo mediante la agregación infinita de elementos discontinuos?

Es posible encontrar al menos otros tres antecedentes de problemas geométricos que requieren un pensamiento de lo infinitamente pequeño: las aproximaciones poligonales de Arquímedes, los métodos de suma de cantidades diminutas de Pascal y la utilización de triángulos con lados infinitamente pequeños por parte de Fermat. La potencia de la invención del cálculo yace, por lo tanto, en su poder unificador, en la posibilidad de entregar una solución única a los diversos problemas que involucran cantidades infinitesimales. De esta diversidad de problemas también se explican los diferentes caminos que tomaron sus dos autores según los problemas que les incitaban mayor urgencia. Vemos en Newton, por su lado, una fuerte tendencia a las ciencias naturales; mientras que en Leibniz una cercanía a consideraciones analíticas referentes a la lógica y la matemática pura. La ontología absolutista respecto al espacio que afirma la física de Newton frente a la ontología relacional planteada por Leibniz se condice respectivamente con la distinción entre una perspectiva global y una local en el modo de idear el cálculo. Así fue como Leibniz se vio posibilitado de volver inteligible un dominio discontinuo donde hablar de infinitesimales, algo imposible desde la ontología newtoniana.

Según Deleuze, la disputa inicial se manifiesta del siguiente modo: “el error de Newton consiste en igualar a cero las diferenciales, mientras que el de Leibniz en otorgarles individualidad o variabilidad” (2017, p. 262). Siendo una cantidad variable, tomada tan pequeña como sea necesario, pero sin nunca ser cero, operar con ella necesariamente conlleva errores, aunque sean muy pequeños. Tan pequeños como para considerarlos insignificantes, según Leibniz (Esquisabel, 2021, p. 283). Esta forma de comprender lo diferencial está perfectamente abordada en términos ontológicos en la Monadología y, de hecho, es preciso decir que Leibniz definió los diferenciales en base a las mónadas. No obstante, en términos matemáticos esta idea no alcanzó el nivel de abstracción suficiente para consolidarse como teoría, así como tampoco lo hicieron las fuentes de Newton.

4. Dos maneras de pensar el continuo

En síntesis, la dificultad en la comprensión matemática de las cantidades infinitesimales recae en este estado intermitente entre ser nulo y tener alguna cierta extensión mínima. Al respecto, Deleuze distingue dos comprensiones dominantes en este problema: la interpretación finita y la interpretación infinita, y plantea que la metafísica del cálculo se trata justamente de crear una alternativa entre estas interpretaciones. Además, agrega:

También esta alternativa y, por consiguiente, la metafísica, son estrechamente inmanentes a la técnica del cálculo mismo. Por ello la pregunta metafísica fue enunciada desde el comienzo: ¿por qué, técnicamente, las diferenciales son despreciables y deben desaparecer en el resultado? (Deleuze, 2017, p. 269)

Tal desaparición que denuncia Deleuze se expresa en cualquier ámbito del cálculo. Para clarificarlo, tomemos dos ejemplos, uno del cálculo diferencial y otro del integral.

Existe un modo bastante estándar de calcular una derivada, pero a efectos de esta exposición intentaremos calcular una como es propio en el cálculo de Leibniz y, en general en el análisis previo a la definición de Cauchy y Weierstrass. También es posible encontrar este método en el análisis no estándar de Robinson, quien propone a mediados del siglo XX

una teoría moderna de infinitesimales inspirada explícitamente en la ontología de Leibniz. A este método Lakoff y Núñez lo denominan derivada acumulativa (2000, p. 252). Sea la función $f(x) = x^2$. Tenemos que, dados dos puntos en la gráfica de la función, la pendiente de la recta que los conecta está determinada por:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Para el caso particular que estamos calculando, se tiene:

$$m = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$$

Ahora, se define inicialmente la operación de derivar como el cálculo de la pendiente en un punto tangente a la curva. De modo que hemos de acercar x_2 a x_1 de manera indefinida (para tener sólo un punto), pero en ello nos acercamos progresivamente a la resta de un valor consigo mismo, lo que nos daría 0 tanto en el numerador como en el denominador. Es necesario, por lo tanto, anticiparse a la indeterminación $\frac{0}{0}$. Allí surge la noción de diferencial: en lugar de tener $x_2 - x_1$ en el denominador, tendremos $x^2 - (x + dx)^2$. Es decir, calculamos la distancia con respecto a algo que es ligeramente mayor que sí mismo para evitar la indeterminación, de la siguiente forma:

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x + dx)^2}{x - (x + dx)}$$

Desarrollando esta expresión nos queda:

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x^2 + 2xdx + dx^2)}{x - x - dx}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x^2 - 2xdx - dx^2}{-dx}$$

$$f'(x) = \frac{-2xdx - dx^2}{-dx}$$

$$f'(x) = \frac{-dx - (2x - dx)}{-dx}$$

$$f'(x) = 2x - dx$$

Luego, como dx es una cantidad infinitamente pequeña, podemos decir que no contribuye al resultado, y así la función derivada de la función f es: $f'(x) = 2x - dx$

Como podemos notar, si bien en el primer momento le otorgamos cierta magnitud a dx , al final cuando solamente nos queda $2x - dx$ pasamos a considerar su valor como equivalente a cero. Esta es una de las primeras paradojas del cálculo: ¿qué sucede con el diferencial al determinar la derivada? Pensar de este modo generó grandes controversias dentro de la disciplina, puesto que no se lograba dar con una definición precisa de la noción de “infinitamente pequeño”. Esta idea se logra precisar rigurosamente mediante la noción topológica de vecindad que surgirá posteriormente. Notamos que las dificultades de esta paradoja se dan, en el fondo, a nivel dialéctico, esto es, se precisa una comprensión matemática del problema de la relación entre continuo y discontinuo, lo cual se satisface con la introducción de la aritmética en el núcleo del análisis.

Pasando al segundo ejemplo, entiéndase una integral como la operación inversa a la derivada. En este sentido, si la derivada aborda problemas sobre fenómenos locales y puntos particulares, la integral comprende el análisis de razonamientos globales o relativos a extensiones. Para una función en el plano real, puede entenderse la integral como el área encerrada por la curva asociada a tal función y el eje de las abscisas. Una manera usual de definirla es por medio de la integral de Riemann que tiene su antecedente en el método de aproximación de Pascal, el cual implica la consideración de infinitos rectángulos que tienden a ser infinitamente pequeños. Se procede de la siguiente forma: primero imaginamos, debajo de la curva, rectángulos cuya suma de áreas aproximen el valor del área encerrada por la curva (ver Figura 1, imagen a la izquierda). Luego, en la medida que hacemos tender a cero el ancho de los rectángulos, tendremos que sus alturas podrán acomodarse suavemente a la curva (Figura 1, imagen a la derecha).

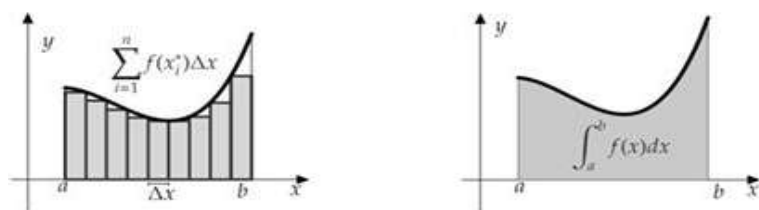


Figura 1

Nota. Al lado izquierdo la suma discreta de rectángulos y al lado derecho el paso al límite cuando la suma se vuelve continua.

En tanto los rectángulos se acercan a la forma de la curva, es válido preguntarnos: ¿en qué momento esta aproximación se convierte en el área real de la curva? ¿Qué sucede con el espacio que falta para completar el área? ¿Se debe considerar como un error que se puede despreciar por ser infinitamente pequeño? El mismo problema denunciado por Deleuze vuelve a aparecer, enfatizando el carácter paradójico del pensamiento que subyace a la técnica del cálculo. Se volvió necesario, de este modo, crear una teoría que diera respuesta al antiguo problema de la definición de una longitud, área o volumen. La denominada teoría de la medida logra capturar la idea que subyace al problema de agregación infinita mediante el objeto de teoría de conjuntos llamado -álgebra. El cual traslada el problema geométrico de sumar infinitas secciones a la operación algebraica de unir numerables conjuntos.

5. Críticas y defensas

En el tratado *El Analista*, publicado por George Berkeley en 1734, está presente una de las críticas más influyentes al cálculo basada principalmente en tres puntos (Santaya, 2017, p. 77-78):

1. El método procede por medio de la inducción a partir de los resultados obtenidos, y no de la deducción de principios exactos.
2. El método desafía a la ley de no contradicción al apelar a nociones de las que no puede decirse ni que existen ni que no existen.

3. El método da lugar a errores en el cálculo matemático.

En general, la importancia de su crítica yace en que sintetiza bastante bien la diversidad de opiniones que surgieron en contra, denotando una clara resistencia a operar con dominios discontinuos y elementos ficcionales, sin importar su presunta utilidad. En consecuencia, esta perspectiva suprime la dialéctica continuo-discontinuo, afirmando la primacía de las consideraciones continuistas.

Por otro lado, Lazare Carnot en su escrito *Reflections on the Metaphysics of the Infinitesimal Calculus* (1797) presenta un modo de entender la problemática apelando a que existe una distinción entre el dominio donde se plantea el problema, sea cuando concebimos el diferencial para calcular la derivada o cuando suponemos rectángulos infinitesimales al calcular la integral, y el dominio donde se determina efectivamente la solución (Deleuze, 2017, p. 260). Carnot construye su defensa planteando que existen dos opciones: (1) reducir el cálculo a la aritmética, aceptando las limitaciones y dificultades técnicas que esto presenta y (2) aceptar que utilizamos los infinitesimales en un sentido figurativo y que se mantienen siempre dentro de un dominio de discontinuidad distinto por naturaleza a aquel donde se determina la solución continua.

6. Una nueva forma de pensar el continuo

En este punto, los debates sobre la comprensión matemática de esta dialéctica se involucraron de manera tal en la fundamentación del análisis que permitió el surgimiento de un conjunto de prácticas y teorías que demarcan lo que hoy llamamos interpretación estática. Un punto crucial en este proceso es la definición de límite realizada por Cauchy en su obra *Cours d'Analyse* (1821). La contribución de Cauchy consiste en la superación de la consideración representacional del espacio presente en las antiguas formulaciones del concepto de infinitesimal. La dificultad de dicha consideración se debe a una espacialización de los diferenciales, es decir, al hecho de ver en las cantidades infinitesimales la persistencia de una especie de magnitud, o geoméricamente, de extensión. En otras palabras, reside en la dificultad implícita a la intención de representar la dinámica de objetos abstractos bajo aspectos propios de nuestra intuición espacial y geométrica. La formulación de Cauchy logró superar rigurosamente estos

problemas con la introducción del concepto de límite. Gracias a su fundamentación en sucesiones convergentes, entrega una definición precisa de la noción vaga de cercanía infinita. Posteriormente esta definición logra consolidarse en la Topología mediante una definición abstracta que la libera de todo aspecto espacial. Para ello, fue crucial la contribución de Weierstrass quien vio en ellas una consideración representacional del movimiento. La abstracción realizada por Weierstrass en 1872 es un antecedente fundamental del plegado entre aritmética y análisis que caracterizará a las matemáticas modernas. Esto ya que logra superar la noción de distancia infinitamente pequeña al dejar de pensar en la cantidad numérica que separa a los dos elementos infinitamente cercanos, otorgando un preciso planteamiento desde la teoría de conjuntos: se dice que un elemento está en la vecindad de otro, si todo conjunto abierto generado en uno también contiene al otro. Deleuze describe esta transición a la interpretación estática de la siguiente forma en *Diferencia y Repetición*:

La noción de límite ha perdido su carácter fronómico y ya no envuelve sino consideraciones estáticas (...) la variabilidad ya ha dejado de representar un pasaje progresivo a través de todos los valores de un intervalo, para significar únicamente la asunción disyuntiva de un valor en ese intervalo. (Deleuze, 2017, p. 269)

La interpretación estática que permite al cálculo consolidarse objetivamente conlleva, por lo tanto, dos saltos de abstracción donde se resuelven sus consideraciones representacionales del espacio y del movimiento, respectivamente. Era necesario superar la comprensión sensorial de espacio y tiempo para avanzar hacia una definición expresamente aritmética de tales conceptos. Estas dimensiones espaciales y temporales infiltradas son muestra de cómo nuestros esquemas del mundo se enraizan en nuestras teorías más abstractas, dejando ver que la génesis de las matemáticas conlleva ineludiblemente un tránsito de lo concreto hacia lo ideal. Hay un despliegue de la idea que va consolidando su propia objetividad. No obstante, que se hayan superado estas nociones representacionales no quiere decir que las matemáticas deben escindirse de todo carácter espaciotemporal. Más bien, es necesario superar las nociones vagas basadas en el sentido común y en ello encontrar una genuina forma de encontrarse con lo real en el interior de la matemática. Ejemplo de ello son las investigaciones realizadas por Lautman en sus artículos “Simetría y disimetría en ma-

temáticas y física” (2011, p. 385) y “El problema del tiempo” (2011, p. 405) donde muestra cómo es posible, al indagar en diversas técnicas y teorías específicas, encontrar lo que podría corresponder a un primer dibujo de la forma del espacio-tiempo expresado en la estructura de las matemáticas.

7. Trasvases entre continuo y discreto

A lo largo de este recorrido, hemos podido observar cómo han predominado en las matemáticas clásicas dos modos de concebir las relaciones entre lo continuo y lo discreto. La primera de ellas, una donde lo continuo surge desde lo discontinuo, en una especie de enriquecimiento progresivo de lo discreto (Lautman, 2011, p. 327). Y, por otro lado, una donde lo continuo tiene prioridad sobre lo discontinuo, presentando una anterioridad ante la cual lo discreto sólo actúa por aproximación (Lautman, 2011, p. 328). Una distinción que recuerda, no por coincidencia, a la distinción entre un espacio relativo y uno absoluto en el célebre debate entre Leibniz y Newton –e incluso a aquel entre Leibniz y Spinoza. Notamos que ambas posiciones resultan insuficientes puesto que, tanto al generar lo infinito por dilatación de lo finito o lo finito por encogimiento de lo infinito, se presenta un irresoluble ímpetu de agotar el infinito (Lautman, 2011, p. 328). Ante esto, Lautman plantea que las matemáticas del S. XX permiten ampliar la perspectiva planteando un tercer modo de concebir esta dialéctica. De este modo, una actitud muy diferente consiste en ver en ambos dominios:

No dos términos extremos de un paso que debe operarse, sino dos géneros de seres distintos, dotados cada uno de una estructura propia, y susceptibles de sostener entre ellos ciertas relaciones de imitación o de expresión. (Lautman, 2011, p. 328)

Tales conceptos de imitación y expresión son cruciales para describir los tránsitos que ocurren entre los distintos dominios, y permiten explicar con gran claridad los complejos movimientos que ocurren en las matemáticas a partir del S. XX. Hablamos de imitación, cuando la estructura interna de lo infinito imita la estructura de lo finito, algo que es posible ver, por ejemplo, en las construcciones de espacios de dimensión infinita realizadas por David Hilbert, donde opera inicialmente una radicalización de las propiedades de espacios de dimensión finita (Lautman, 2011, p.

329). Y, por otro lado, se habla de expresión cuando un dominio infinito expresa las propiedades del dominio finito que lo envuelve y sobre el cual se define. Un ejemplo de ello es la definición de las funciones continuas automorfias que realiza Henri Poincaré como funciones invariantes bajo un grupo numerable de transformaciones fraccionales lineales. Como resultado, la mera existencia de estas funciones continuas expresa las propiedades del dominio de discontinuidad que sirve para definir las.

Finalmente, esta nueva epistemología enfatiza, no en la cantidad de elementos de los dominios que se comparan, sino en el armazón lógico que les subyace. Descubriendo así, entre lo finito y lo infinito, relaciones estructurales y adaptaciones recíprocas que permiten inferir que “la unidad de las matemáticas es esencialmente la unidad de los esquemas lógicos que presiden la organización de sus edificios” (Lautman, 2011, p. 329).

Referencias

Berkeley, G. (1734). *The Analyst*. J. Tonson.

Carnot, L. (1797). *Reflections on the Metaphysics of the Infinitesimal Calculus*. Duprat.

Cauchy, A. (1821). *Cours D'Analyse De L'Ecole Royale Polytechnique, Part 1: Analyse Algebrique Cours d'Analyse*. ROA.

Esquisabel, O. (2021). ¿Qué es una ficción en matemáticas? Leibniz y los infinitesimales como ficciones. Ediciones Complutense.

Deleuze, G. (2017). *Diferencia y repetición*. Amorrortu.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press.

Lakoff, G. y Nuñez, R. (2000). *Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Lautman, A. (2011). *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*. Universidad Nacional de Colombia.

Santaya, G. (2017). *El cálculo trascendental. Gilles Deleuze y el cálculo diferencial: ontología e historia*. RAGIF Ediciones.