



**María Gabriela Fissore
Agustín Mauro
Barbara Paez Sueldo
Mateo Santillan Castro
(Eds.)**

Filosofía de las Ciencias por Jóvenes Investigadores

vol. 4

Filosofía de la Ciencia por Jóvenes Investigadores

vol. 4

María Gabriela Fissore
Agustín Mauro
Barbara Paez Sueldo
Mateo Santillan Castro
(Eds.)

Colecciones
del CIFYH



Filosofía de la Ciencia por jóvenes investigadores vol. 4 / Matías Giri... [et al.]; editado por María Gabriela Fissore ... [et al.]. - 1a ed. - Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Filosofía y Humanidades, 2023.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-33-1766-2

1. Filosofía de la Ciencia. I. Giri, Matías. II. Fissore, María Gabriela, ed.

CDD 121

Publicado por

Área de Publicaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades - UNC

Córdoba - Argentina

1º Edición

● ●
Área de
Publicaciones

Lxs editorxs de este volumen agradecen a los miembros de la Carrera de Personal de Apoyo del IDH-CONICET –Federico Mina, Cecilia Martínez y Julián Reynoso– por la colaboración recibida.

Correctores técnicos: Ignacio Heredia y Tomás Siac

Diagramación y diseño de portadas: María Bella

2023



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.



Método heurístico para la resolución de demostraciones en el sistema Fitch

Milena Dassie Wilke*

Introducción

Este trabajo está motivado por la dificultad de los estudiantes para resolver demostraciones formales en la materia Lógica Formal de la FFyH, problema que puede encontrarse también en la enseñanza de matemáticas. Esta materia, ubicada en el primer año de las carreras de licenciatura y profesorado en Filosofía de la UNC, tiene como contenido principal un recorte de los elementos de la lógica clásica de primer orden en versiones semánticas y sintácticas, así como elementos de filosofía e historia de la lógica. En cuanto al fragmento sintáctico de la materia, se trabaja en la resolución práctica de demostraciones en el sistema Fitch (1952). Este sistema se utiliza especialmente en lógica proposicional y cuantificacional para construir y justificar demostraciones con conectivas y cuantificadores en deducción natural. Su atractivo está en que permite mostrar gráficamente la diferencia entre premisas, supuestos y el resto de la demostración (por medio de líneas) y que expone de manera visual los pasos necesarios para llegar, como un puente, de las premisas a la conclusión (excepto en demostraciones sin premisas). Entenderemos a Fitch como un sistema en el cual una parte (las premisas) nos ofrece cierta información y otra (la conclusión) nos exige cierta información. Comprender al sistema formal en esta dinámica de ofrecimiento-exigencia nos permitirá explicar más fácilmente nuestro método.¹

En el sistema Fitch cada paso de la premisa a la conclusión está justificado con una regla de introducción o eliminación de conectivas o cuantificadores que permiten, en cierto sentido, armar y desarmar enunciados. Dichas reglas pueden, hasta cierto punto, ser aprendidas de memoria y

¹ Este método fue construido por la autora del trabajo en base a su experiencia dictando talleres de acompañamiento para Lógica Formal en la FFyH.

* FFyH, UNC.

Mail de contacto: milena.dassie.wilke@mi.unc.edu.ar

aplicadas sistemáticamente ya que hay un único modo de utilizarlas correctamente. El problema para el estudiante es darse cuenta cuándo utilizarlas. No es obvio, a la hora de resolver una demostración, cuándo debemos usar qué regla pues cada demostración se resolverá (a simple vista) de manera única dependiendo de cuál sea su combinación de premisas y conclusión. Además, entran en juego elementos de intuición y creatividad de la persona que resuelve y por esto es difícil entender y enseñar cómo resolver una demostración y no es posible presentar un método de resolución efectivo y seguro.

Para adquirir la habilidad de resolver demostraciones es necesario un criterio adecuado que se consigue, principalmente, con la práctica de resolver demostraciones. Veremos en la sección 1.1 que para ejercitar dicha habilidad es útil contar con estrategias generales que agrupen modos de resolución, pero encontrar estas estrategias exige una familiaridad previa con dichas resoluciones. La capacidad de generalizar entre diferentes demostraciones para encontrar sus similitudes y elaborar estructuras o casos de resolución se logra luego de haber resuelto una buena cantidad de demostraciones. Esta paradoja dificulta el aprendizaje de los estudiantes que no logran completar los ejercicios individualmente, pues no pueden crear estrategias de resolución por sí mismos.

El problema pedagógico está en que, a pesar de encontrar trabajos centrados en el proceso de construcción de demostraciones y estrategias explícitas de creación (Boulay y Luckin, 1999; Pelletier, 1999; Seligman, 2012), las herramientas para ayudar en esta etapa son escasas en el sistema Fitch.² Es en este contexto en que queremos presentar nuestro método. Pueden existir otras causas para la dificultad del aprendizaje en Lógica Formal, pero este trabajo se concentrará en un momento inicial en el que el estudiante solo cuenta con reglas, un par de premisas y una conclusión.

1. Marco

Nuestro método se apoya en el tercer capítulo de *How to prove it* de Velleman (2019), en el cual presenta estrategias para resolver demostraciones con conectivas diferenciando su rol cuando se encuentran en enunciados que ya están afirmados y en enunciados que queremos afirmar, puesto

2 Para la diferenciación entre creación y justificación en demostraciones formales véase Velleman (2019).

que la información anclada a la conectiva funcionará de manera diferente en cada caso. Las técnicas que presenta toman como punto de análisis las conectivas, por ejemplo, para el caso de tener $P \rightarrow Q$ afirmado, Velleman (2019) indica que por ser un condicional tendremos que probar P y luego podremos usar esta nueva afirmación para concluir Q . El autor señala que si lo que tenemos es un condicional, para poder utilizar este enunciado necesitamos el antecedente, pues de otra manera generalmente no podríamos usar a $P \rightarrow Q$ (Velleman, 2019). Para el caso de tener un condicional como conectiva en un enunciado al que queremos llegar Velleman (2019) indica que debemos asumir el antecedente y tomar al consecuente como el nuevo enunciado al que queremos llegar. De esta forma, si lo que queremos afirmar es una operación condicional, el autor recomienda como primer paso suponer el antecedente e intentar afirmar el consecuente. Así, aunque la conectiva sea la misma, exige diferentes técnicas dependiendo de dónde se encuentre.

El método que queremos presentar resulta ser una versión más general de estas técnicas. Retomaremos dos elementos del texto: basar el análisis del método en las conectivas y diferenciar entre lo afirmado y lo que queremos afirmar. En este trabajo nos centraremos en el rol de las conectivas en las premisas y en la conclusión, pues este es el material que tendrá le estudiante en un primer momento. Queríamos remarcar el rol de las conectivas, entendiéndolas como una fuente de información, e incitar al análisis de las premisas y la conclusión como método para la resolución. Retomamos a Velleman (2019) por su uso de estos dos elementos y porque se basa en las intuiciones que se apegan a las herramientas que entrega el sistema. Nuestro método es, entonces, un intento de explicitar qué se le puede ocurrir hacer a alguien que se encuentra frente a una demostración y se hace una idea de cómo resolverla.

1.1. Enseñanza

¿Qué distingue a alguien que logra resolver una demostración de alguien que no? Kaur (1997) responde a esta pregunta al revisar la literatura respecto a las dificultades para resolver problemas en matemática. La autora diferencia entre las estrategias que utilizan las personas que logran y las personas que no logran resolver problemas regularmente. Marca que quienes sí lo logran tienen habilidades para distinguir información rele-

vante, entender la estructura del problema y generalizar entre problemas similares. Mientras que quienes tienen dificultades para resolver problemas muestran una tendencia a enfocarse en elementos superficiales y en detalles (Kaur, 1997).

La autora explicita los conocimientos necesarios para resolver problemas y entre ellos destaca el conocimiento esquemático, que se basa en la relación entre tipos de problemas, y el estratégico, que se refiere a cómo abordar problemas. Estos dos tipos de conocimiento son los que buscaremos fomentar con nuestro método. En cuanto al conocimiento esquemático, hablaremos de tipos de demostraciones y, aunque no podamos presentar esquemas de resolución segura por los límites del sistema Fitch, mostraremos casos de resolución posibles. El segundo tipo de conocimiento tiene una respuesta en nuestro método que incita a resolver la demostración con la estrategia de identificar las conectivas de las premisas y la conclusión para ver los caminos que pueden llevarlos a la resolución de la demostración (o al menos les ayudará pensar en una posible solución). Nuestro método busca entregar una importante herramienta: saber por dónde empezar.

Es necesario, entonces, poder entender la demostración con un esquema general para poder idear un plan. Polya (1965) indaga sobre cómo crear un plan y analiza las fases necesarias para resolver un problema. El autor indica que primero es necesario comprender el problema y que luego es esencial trazar un plan (Polya, 1965, p. 28). En el caso del sistema Fitch es claro cuáles son las partes de la demostración, sin embargo, a veces es difícil entender cómo están armadas y qué elementos componen a las premisas y a la conclusión. Nuestro método colaboraría con la primera fase de la resolución al centrar la atención de le estudiante en las conectivas de las premisas y la conclusión e incitar al análisis de la demostración previo a su resolución. En cuanto a la segunda fase, Polya indica que “tenemos un plan cuando sabemos, al menos a ‘grosso modo’, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita” (1965, p. 30), esto es, cuando sabemos cuáles son las reglas principales que usaremos para llegar a la conclusión. El autor presenta una técnica para trazar un plan que consiste en encontrar un problema resuelto que sea similar al que le estudiante trata de resolver. La dificultad estriba en que hay múltiples problemas que son similares y “encontrándose muchos, resulta difícil elegir el que sea realmente útil”

(Polya, 1965, p. 66). Nuestro método busca acortar entre la multiplicidad de demostraciones similares presentando, primero, tipos de resoluciones de demostraciones y, segundo, cómo identificar qué tipo es útil para la demostración en específico.

Tomando en cuenta lo que les autores presentan, concluimos que las técnicas de encontrar similitudes entre demostraciones diferentes, reconocer su estructura y utilizarla para ordenar un esquema, son recursos esenciales para la resolución de problemas. Kaur (1997) indica que las personas expertas en resolver problemas tienen repertorios de patrones familiares y conocimientos de tipos de problemas y métodos de solución que les estudiantes aún no han desarrollado y es esta la brecha que nuestro método intenta subsanar al presentar un listado organizado de tipos de problemas y técnicas de resolución que buscan ser lo más general que el sistema le permite. Seguiremos las distinciones de Velleman (2019) para presentar tips que buscan fomentar los conocimientos estratégicos y esquemáticos en los estudiantes al incitar al análisis detallado de la demostración y a trazar un plan antes de comenzar.

2. Resolución de demostraciones

Los tips que presentaremos no son reglas al estilo de las reglas de introducción y eliminación de conectivas, sino que los consideraremos como una heurística de la resolución de demostraciones. No son pasos que se deban aplicar siempre de una única manera, tampoco nos aseguran llegar a la conclusión y mucho menos son necesariamente adecuados o mejores que otras maneras de resolución. Son un intento de explicitar cómo se puede entender una demostración y cuáles son las maneras posibles de resolverla

Nuestros tips se basan en considerar la información que ofrece una conectiva al ser la conectiva principal de una premisa o de la conclusión.³ Siguiendo a Velleman (2019), diferenciamos el rol de la conectiva cuando

³ Un enunciado puede ser simple y tener una única conectiva o puede ser complejo y tener varias conectivas dentro suyo, sin embargo, en ambos casos hay una única conectiva que une las partes principales del enunciado y determina su estructura: La conectiva principal. Una premisa o conclusión puede tener la forma de $(C \rightarrow D) \vee D$, al ser compleja, el hablar sólo de conectiva es ambiguo (podría referir a $\rightarrow$ o a $\vee$) en cambio es seguro cuál es la conectiva principal, $\vee$, pues conecta las partes principales del enunciado (a $(C \rightarrow D)$ con D).

se encuentra en una u otra pues es diferente la información que nos puede brindar. En el caso de estar en las premisas analizaremos la información en cuanto a qué pueden ofrecernos y en el caso de estar en la conclusión la analizaremos en cuanto a qué nos está exigiendo. Entender cómo funcionan las conectivas nos indica qué podemos y no podemos hacer con ellas, y, consecuentemente, cuáles son las formas de proceder que posiblemente nos llevarán a la resolución de la demostración.

Si lo que queremos hacer es armar la conclusión, este enunciado nos estará exigiendo ciertos materiales (que debemos poder encontrar en las premisas y/o los supuestos), cuáles son esos materiales nos lo indica (la mayoría de las veces) su conectiva principal. Los estudiantes pueden encontrar cinco conectivas ($\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$) y podremos presentar dos tips para cada una de ellas (en este trabajo nos limitaremos a presentar sólo algunos a modo de ilustración).⁴ Veamos el caso de la disyunción, esta conectiva enlaza dos disyuntos y afirma al menos uno en la demostración. Esta es la información que nos da la conectiva por sí misma, una vez que identificamos esta conectiva en una premisa podemos considerar qué nos ofrece. Los estudiantes pueden encontrarla extraña o tramposa pues parece que no dice nada al no indicar cuál disyunto podemos afirmar, lo que ofrece una disyunción como conectiva principal en una premisa no es información concreta sobre cada uno o alguno de los disyuntos y, dado que no podemos extraerlos en un paso, el material parece estar encerrado en la premisa. Por esto, es posible que le estudiante deba hacer una eliminación de la disyunción que destrabe la información al mostrar que, cualquiera sea el disyunto que afirmemos, un mismo enunciado se seguirá de cada uno de ellos. Así, el tip indica que:

...si se encuentra con una disyunción como conectiva principal de una premisa, es posible que esta le esté ofreciendo un enunciado que se sigue de cada uno de sus disyuntos. Para demostrarlo deberá suponer cada disyunto y afirmar en cada subdemostración el enunciado al que busca llegar (esto lo podrá hacer por medio de las premisas y suposiciones o podría aparecer luego en la demostración). Una vez que haya hecho esto la regla de eliminación de la disyunción le permite salir de las suposiciones afirmando el enunciado.

4 El listado completo de tips se encuentra en Tips heurísticos para la resolución de demostraciones en el sistema Fitch en (Milena Dassie Wilke - Academia.edu, s. f.).

En el caso de la disyunción como conectiva principal de la conclusión consideraremos qué exige. Es posible que exija que le estudiante forme dicha disyunción utilizando la regla de introducción de la conectiva. Esta regla parece contraintuitiva para los estudiantes pues permite afirmar un disyunto nuevo sin haberlo demostrado, es útil en este caso la noción de la conclusión como un enunciado a armar, pues diremos que sólo exige el material de uno de los disyuntos y buscar el otro sería un desperdicio de nuestro tiempo. Así, el tip indica que:

...si se encuentra con una disyunción como conectiva principal de su conclusión, es posible que esta le esté exigiendo identificar sus disyuntos y afirmar sólo uno de ellos (esto lo podrá hacer por medio de las demás premisas y suposiciones o podría aparecer luego en la demostración). Una vez que haya hecho esto la regla de introducción de la disyunción le permite agregar el otro disyunto y construir la disyunción para afirmar su conclusión.

Con esto ejemplificamos nuestro método. Como indicamos, tomamos la conectiva principal del enunciado como punto de análisis y diferenciamos su rol cuando se encuentra en la conclusión y en las premisas, explicitamos la información que nos da la conectiva y luego marcamos cuál es el camino que nos indica como un posible modo de resolver. No hablamos de necesidad puesto que algunas demostraciones se resuelven usando una regla que afecta a las premisas y no a la conclusión y viceversa, la mayoría de las veces la regla más estricta prevalece sobre las otras y determina la estrategia general de la demostración.⁵ También, en el caso del segundo tip, no indicamos cuál es el disyunto que debe ser afirmado ni establecimos cómo puede lograr afirmarlo. A pesar de fomentar el análisis de proposiciones según sus conectivas, este método precisa de una visión general para su uso. Se basa en la idea de que los estudiantes tomen en cuenta el cruce entre los tips de cada premisa y el tip de la conclusión para relacionar los ofrecimientos particulares con las exigencias particulares de su demostración y resolver los puntos que el método no podría resolver.

5 Por ejemplo, la conclusión AVB se sigue de las premisas $B \rightarrow (AVB)$ y B por eliminación del condicional y no por la introducción de la disyunción que su conclusión parecía insinuar. En este caso, la estrategia general de resolución sigue el tip que indica qué nos ofrecen las premisas y no es necesario utilizar el tip de la conclusión. Por esto sostuvimos que no hablamos de reglas que lleven necesariamente a la resolución, sino de tips heurísticos que den una aproximación a la resolución que a veces funciona y a veces no, dependiendo de cada demostración particular.

Por estas últimas características del método es que consideramos que no debería caer en un problema que Polya marca: el ayudar demasiado, “si el alumno ha concebido realmente un plan, el maestro puede disfrutar un momento de una paz relativa. El peligro estriba en que el alumno olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior” (1965, p. 33). A pesar de dar pistas sobre cuál camino podría llevar a la resolución, nuestro método no presenta reglas que puedan ser aplicadas sistemáticamente para llegar a la conclusión. Puesto que cada demostración tendrá una conclusión y premisas nuevas (en su estructura no lo serán, pero serán entendidas como nuevas), estará en le estudiante el encontrar la relación entre ellas y jerarquizar los posibles caminos que se siguen de cada conectiva principal de las premisas y de la conclusión. Será su trabajo también el separar la información relevante de la irrelevante (aunque el saber qué exige la conclusión puede ayudarle en esta tarea) y, por último, una vez que logre armar un plan general, deberá tomar la decisión de cuál regla aplicará primero. Por lo que, aunque el método sí entrega información sobre los caminos posibles, remarca también que todos son posibles y requiere un análisis más profundo (e intentos fallidos) el descubrir cuál lleva a la resolución y en qué orden deben aplicarse. Para estar seguras de la efectividad del método, de su capacidad para ayudar y no ayudar de más, sería óptimo un testeo.

3. Conclusión

Hemos realizado una primera aproximación al empleo de nuestro método en talleres de acompañamiento de la materia Lógica Formal. Se lo utilizó principalmente para la explicación y construcción de demostraciones entre todos y tuvo resultados satisfactorios. Su utilidad se encuentra en su poder explicativo en los inicios de la demostración: analizar las premisas y la conclusión por separado y en detalle fue recibido positivamente por los estudiantes, quienes de otra manera no comprendían la demostración en su totalidad. No mostraron complicaciones para pasar del análisis detallado de la conclusión y las premisas al análisis de ambas en conjunto. Tampoco manifestaron dificultades para aceptar que las demostraciones no siempre se resuelven de la misma forma y que los tips se presentan como indicios o pistas antes que como reglas. Corcoran (2015) realiza un estudio histórico para sostener que en el siglo XXI es más fácil entender



a la lógica como una disciplina que no acarrea certeza y verdad necesaria, en este contexto los estudiantes del taller entendieron a los tips como una heurística y así los reconstruyeron a la hora de explicar las estrategias utilizadas para resolver la demostración en conjunto.

Este método se presenta también para la resolución individual, se presenta como un conjunto de tips a ser utilizados de manera autónoma por los estudiantes que encuentren dificultades para resolver demostraciones. Su utilidad en este ámbito todavía no ha podido ser evaluada (un ejemplo de un buen testeo de un método de enseñanza individual se encuentra en Boulay y Luckin, 1999). Una limitación que puede tener el método en este ámbito es que puede llegar a generar consecuencias contraproducentes para el aprendizaje si se lo utiliza constantemente y si se entiende a los tips como el único modo de analizar y resolver demostraciones. El método puede generar inseguridad y confusiones en estudiantes que lograron entender y resolver una demostración de manera diferente a como indican los tips, por esto se lo presenta como una ayuda extra luego de encontrar dificultades en la resolución individual. La habilidad para resolver demostraciones precisa antes que nada de práctica y es en esta etapa en que nuestro método puede ser un buen acompañante.

Referencias

- Boulay, B. y Luckin, R. (1999). Ecolab: The Development and Evaluation of a Vygotskian Design Framework. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 10(2), 198-220.
- Corcoran, J. (2015). Logic teaching in the 21st century. *Quadripartita Ratio: Revista de Argumentación y Retórica*, 1(1), 1-34.
- Fitch, F. (1952). *Symbolic Logic: An Introduction*. Ronald Press.
- Kaur, B. (1997). Difficulties with problem solving in mathematics. *The Mathematics Educator*, 2(1), 93-112. <http://hdl.handle.net/10497/132>.
- Milena Dassie Wilke—Academia.edu. (s. f.). Academia.edu. <https://independent.academia.edu/MDassieWilke>

- Pelletier, F. (1999). *A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks*. University of Alberta.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.
- Seligman, J. (2012). *Natural deduction as a creative process*. University of Auckland.
- Velleman, D. (2019) *How to prove it: a structured approach*. Cambridge University Press.